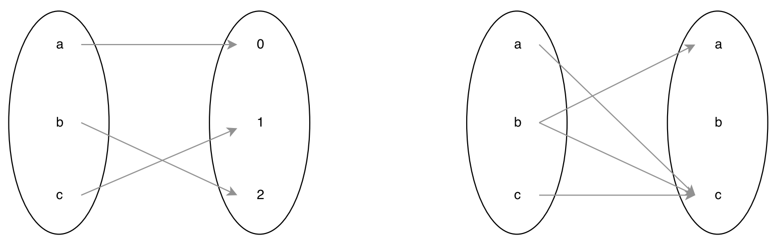
DLST L1 — Université Grenoble Alpes

Travaux Dirigés, corrigé partiel — INF202 2017/2018

Feuille 1

Exercice 1



(a) Représentation en graphe de $\mathcal{S}$ (b) Représentation en graphe de $\mathcal{R}$

Figure 1: Représentations en graphe de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$

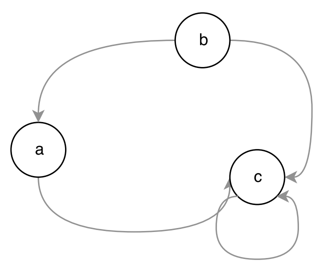


Figure 2: Représentation en graphe orienté de $\mathcal{R}$

Exercice 2

$<$	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0

(a) Représentation en tableau de $<$

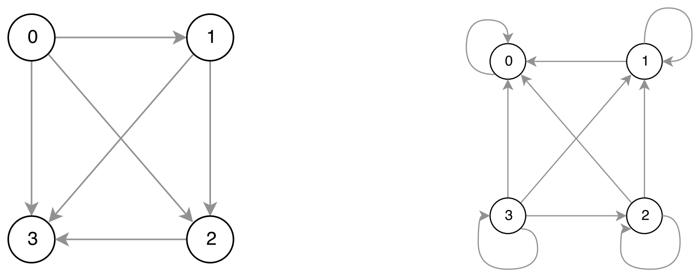
$\geq$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	1	1	1	0
3	1	1	1	1

(b) Représentation en tableau de $\geq$

Figure 3: Représentations en tableaux

(a) graphe de $<$ (b) graphe de $\geq$

Figure 4: Représentations en graphe



(a) graphe orienté de $<$ (b) graphe orienté de $\geq$

Figure 5: graphe orienté de $\geq$

Exercice 4

(l'ordre des couples dans chaque ensemble n'importe pas. L'ordre des éléments dans chaque couple est important)

- $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \{(a_1, b_0), (a_1, b_2)\}$
- $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_0), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$
- $\mathcal{R}_1 = \{(b_0, a_0), (b_0, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_1), (b_2, a_2)\}$

- $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T} = \{(z_0, b_0), (z_0, b_2), (z_1, b_0), (z_1, b_1), (z_1, b_2)\}$
- $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1 = \{(a_0, c_0), (a_1, c_0), (a_2, c_0), (a_2, c_1)\}$
- $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T} = \{(z_0, b_0), (z_0, b_1), (z_0, b_2), (z_1, b_0), (z_1, b_1), (z_1, b_2)\}$
- $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_2 = \{(a_0, c_0), (a_0, c_1), (a_1, c_0), (a_1, c_1)\}$

- $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1) \circ \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \circ (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T})$ valent tout deux $\{(z_0, c_0), (z_1, c_0), (z_1, c_1)\}$

$\rightarrow$ On remarque que les deux sont égaux. L'égalité $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$ est toujours vraie et sera (re)-démontrée dans l'exercice suivant.

- $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_\in) \circ \mathcal{T}$ et $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$ valent tout deux $Z \times B = \{(z_0, b_0), (z_0, b_1), (z_0, b_2), (z_1, b_0), (z_1, b_1), (z_1$
Même remarque.
- $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_\in) \circ \mathcal{T} = \{(z_0, b_0), (z_0, b_2), (z_1, b_0), (z_1, b_2)$
$(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T}) = \{(z_0, b_0), (z_0, b_2), (z_1, b_0), (z_1, b_1), (z_1, b_2)\}$

→ On remarque que le premier est inclus, mais non égal au second. Cette inclusion est toujours vraie.

- $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)^{-1}$ et $\mathcal{R}_1^{-1} cap \mathcal{R}_2^{-1}$ valent $\{(b_0, a_1), (b_2, a_1)\}$
- $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)^{-1}$ et $\mathcal{R}_1^{-1} cup \mathcal{R}_2^{-1}$ valent $\{(b_0, a_0), (b_1, a_0), (b_0, a_1), (b_1, a_1), (b_2, a_1), (b_0, a_2), (b_1, a_2), (b_2, a_2)\}$

Exercice 5

démontrer les assertions suivantes :
– La composition est associative

Une première manière de faire Soient trois relations F, G,et H. On souhaite démontrer que
$$Ho(GoF) = (HoG)oF$$
On note les ensembles de départ et d'arrivée de F A et B_1, ceux de G B_2 et C_1 et ceux de H C_2 et D.
Sans perte de généralité on peut remplacer B_1 et B_2 tous deux par n'importe quel ensemble parmi $B_1, B_2, B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2$ que l'on notera B, de même pour C.
La définition de la composition est : $\forall f : B \to C, g : A \to B, fog = \{(a, c) \in A \times C, \exists b \in B, (a, b) \in g, \text{ et } (b, c) \in f\}$.

- Appliquons la à GoF :
$$\{(a, c) \in A \times C, \exists b \in B, (a, b) \in F, \text{ et } (b, c) \in G\}$$
- Appliquons la à $Ho(GoF)$:
$$\begin{aligned} & \{(a, c) \in A \times D, \exists b \in C, (a, b) \in GoF, \text{ et } (b, c) \in H\} \\ = \; & \{(a, c) \in A \times D, \exists b \in C, [\exists d \in B, (a, d) \in F, (d, b) \in G], \text{ et } (b, c) \in H\}. \end{aligned}$$
Les $\exists$ commutent entre eux et avec les introductions de variables, donc on peut l'écrire :
$$\{(a, c) \in A \times D, \exists b \in C, \exists d \in B, (a, d) \in F, (d, b) \in G, \text{ et } (b, c) \in H\}$$
- De même, appliquons la à HoG:
$$\{(a, c) \in B \times D, \exists b \in C, (a, b) \in G, \text{ et } (b, c) \in H\}$$
- De même, appliquons la à $(HoG)oF$:
$$\begin{aligned} & \{(a, c) \in A \times D, \exists b \in B, (a, b) \in F, \text{ et } (b, c) \in HoG\} \\ = \; & \{(a, c) \in A \times D, \exists b \in C, (a, b) \in F, [\exists d \in B, (b, d) \in G, \text{ et } (d, c) \in H]\} \; . \\ = \; & \{(a, c) \in A \times D, \exists b \in C, \exists d \in B, (a, b) \in F, (b, d) \in G, \text{ et } (d, c) \in H\} \end{aligned}$$

À permutation des nom de variables près, ces deux définitions coïncident, donc les ensembles de couples sont égaux, donc les relations sont égales.
On a bien : pour toutes relations, F, G, H

Une autre façon de faire Une autre façon de faire (que m'a montré Christian et que j'ai appliqué pour cet exercice) est de passer à l'équivalence c-à-d:

On prend un élément (a, d) quelconque et on exprime l'égalité comme suit

$$(a, d) \in Ho(GoF) \iff (a, d) \in (HoG)oF$$

En développant la partie gauche via la définition de la composition utilisée deux fois,on obtient :

$$(a, d) \in Ho(GoF) \iff \{(a, d) \mid \exists c, (a, c) \in (GoF) \wedge (c, d) \in H\}$$

$$\iff \{(a, d) \mid \exists c, [\exists b, (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G] \wedge (c, d) \in H\}$$

On utilise l'associativité de $\wedge$, et sa distributivité vis à vis de $\exists$, ce qui donne

$$\iff \{(a, d) \mid \exists b, (a, b) \in F \wedge [\exists c, (b, c) \in G \wedge (c, d) \in H]\}$$

Enfin, en utilisant de nouveau la composition deux fois,

$$\iff \{(a, d) \mid \exists b, (a, b) \in F \wedge (b, d) \in (HoG)\}$$

$$\iff (a, d) \in (HoG)oF$$

– *La composition est monotone*

Soient quatre relations, F, F', G et G'. On souhaite démontrer que :
Si $F \subseteq F'$ et $G \subseteq G'$ alors $FoG \subseteq F'oG'$.
Comme précédemment, on peut faire l'hypothèse que les ensembles d'entrée de F et F' et les ensembles de sorties de G et G' coïncident. De même les ensembles d'entrée de G, G' et ceux de sortie de F, F'. On notera $A \xrightarrow{G} B \xrightarrow{F} C$

Soit $(a, b) \in FoG$ on va montrer que $(a, b) \in F'oG'$. On déplie la définition de la composition pour (a, b) :

$$(a, b) \in FoG \Leftrightarrow \exists c \in B, (a, c) \in G \wedge (c, b) \in F$$

On applique les hypothèses $F \subseteq F'$ et $G \subseteq G'$ dans l'équivalence précédente. (notez : l'équivalence devient une implication).

$$(a, b) \in FoG \Rightarrow \exists c \in B, (a, c) \in G' \wedge (c, b) \in F'$$

On replie la composition :

$$(a, b) \in FoG \Rightarrow (a, b) \in F'oG'$$

Ceci étant vrai pour tout élément de FoG, FoG est inclue dans $F'oG'$.
Ceci étant vrai pour tout groupe de quatre relation vérifiant les inclusions $F \subseteq F'$ et $G \subseteq G'$, la composition est croissante, donc monotone.

– *La composition est* $\cup-$*distributive*

Soient trois relations R, S et T, soit un couple (a, b)

$$\begin{aligned}
(a,b) \in (R_1 \cup R_2)oT &\Leftrightarrow \exists c, ((a,c) \in (R_1 \cup R_2) \wedge (c,b) \in T) \\
&\Leftrightarrow \exists c, (((a,c) \in R_1 \vee (a,c) \in R_2) \wedge (c,b) \in T) \\
&\Leftrightarrow \exists c, (((a,c) \in R_1 \wedge (b,c) \in T) \vee ((a,c) \in R_2 \wedge (c,b)) \in T) \text{ (distributivité de } \vee \text{ et } \\
&\Leftrightarrow (\exists c, ((a,c) \in R_1 \wedge (b,c) \in T) \vee (\exists c, (a,c) \in R_2 \wedge (c,b)) \in T) \text{ (distributivité de } \exists \text{ et} \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R_1oT \vee (a,b) \in R_2oT \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R_1oT \cup R_2oT
\end{aligned}$$

– *La composition vérifie* $(R_1 \cap R_2)oT \subseteq (R_1oT) \cap (R_2oT)$

$$\begin{aligned}
(a,b) \in (R_1 \cap R_2)oT &\Rightarrow \exists c, ((a,c) \in (R_1 \cap R_2) \wedge (c,b) \in T) \\
&\Rightarrow \exists c, (((a,c) \in R_1 \wedge (a,c) \in R_2) \wedge (c,b) \in T) \\
&\Rightarrow \exists c, ((a,c) \in R_1 \wedge (b,c) \in T) \\
&\Rightarrow (a,b) \in R_1oT
\end{aligned}$$

Similairement, $(a,b) \in (R_1 \cap R_2)oT \rightarrow (a,b) \in R_2oT$.
On a donc $(a,b) \in (R_1 \cap R_2)oT \rightarrow (a,b) \in R_1oT \wedge (a,b) \in R_2oT$, donc $(a,b) \in (R_1 \cap R_2)oT \rightarrow (a,b) \in (R_1oT) \cap (R_2oT)$, ceci étant vrai pour tout élément (a,b) et pour tout triplet de relations R_1, R_2, T, La composition vérifie

$$(R_1 \cap R_2)oT \subseteq (R_1oT) \cap (R_2oT)$$

.

– *La composition n'est pas* $\cap-$*distributive*

Un exemple est dans l'exercice 4.
On va construire un exemple minimal.
Soient $R_1 = \{(a_1, b)\}$, $R_2 = \{(a_2, b)\}$, et $T = \{(z, a_1), (z, a_2)\}$. On a :

$$(R_1 \cap R_2)oT = \emptyset oT = \emptyset$$

$$(R_1oT) \cap (R_2oT) = \{(z,b)\} \cap \{(z,b)\} = \{(z,b)\} \neq \emptyset$$

Par conséquent, il existe R_1, R_2 et T tels que $(R_1 \cap R_2)oT \neq (R_1oT) \cap (R_2oT)$.

Exercice 6

$(RoS)^{-1}$ **et** $S^{-1}oR^{-1}$

$$\begin{aligned}
(a,b) \in (RoS)^{-1} &\Leftrightarrow (b,a) \in RoS \\
&\Leftrightarrow \exists c, (bc) \in S \wedge (ca) \in R \\
&\Leftrightarrow \exists c, (cb) \in S^{-1} \wedge (ac) \in R^{-1} \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R^{-1}oS^{-1}
\end{aligned}$$

$(R \cup S)^{-1}$ **et** $S^{-1} \cup R^{-1}$

$$\begin{aligned}
(a,b) \in (R \cup S)^{-1} &\Leftrightarrow (b,a) \in R \cup S \\
&\Leftrightarrow (b,a) \in R \vee (b,a) \in S \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R^{-1} \vee (a,b) \in S^{-1} \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R^{-1} \cup S^{-1}
\end{aligned}$$

$(R \cap S)^{-1}$ **et** $S^{-1} \cap R^{-1}$

$$\begin{aligned}
(a,b) \in (R \cap S)^{-1} &\Leftrightarrow (b,a) \in R \cap S \\
&\Leftrightarrow (b,a) \in R \wedge (b,a) \in S \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R^{-1} \wedge (a,b) \in S^{-1} \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R^{-1} \cap S^{-1}
\end{aligned}$$