

## INF124

---

**Durée : 2h00, sans documents.**

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 4 exercices indépendants
- Le sujet est sur 60 points.
- Répondez sur le sujet lorsque les questions comportent des pointillés
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

23 pt

### Exercice 1 : Preuves en déduction naturelle et en français

4 pt

**Q1.** Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème  $(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$$\overline{(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}$$

2 pt

**Q2.** Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.



3 pt

**Q3.** Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème  $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$

$$\overline{(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))}$$



4 pt

**Q4.** Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème  $(\exists u, (\forall v, F(u, v))) \Rightarrow (\forall x, (\exists y, F(y, x)))$

$$\overline{(\exists u, (\forall v, F(u, v))) \Rightarrow (\forall x, (\exists y, F(y, x)))}$$



2 pt

**Q5.** Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.



4 pt

**Q6.** La relation  $R(x, q)$  représente le fait que «  $x$  connaît la réponse à la question  $q$  ». La relation  $E(q, x)$  modélise le fait que «  $q$  est une énigme pour  $x$  ». Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème  $(\forall v, R(\text{Socrate}, v)) \Rightarrow [(\exists u, E(u, \text{Platon})) \Rightarrow (\exists y, (R(\text{Socrate}, y) \wedge E(y, \text{Platon})))]$

---

$$(\forall v, R(\text{Socrate}, v)) \Rightarrow [(\exists u, E(u, \text{Platon})) \Rightarrow (\exists y, (R(\text{Socrate}, y) \wedge E(y, \text{Platon})))]$$



4 pt

**Q7.** Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème suivant :

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$$

---

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$$



10 pt

## Exercice 2 : Preuve de propriétés des ensembles



4 pt

**Q8.** Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que les 3 règles de déduction suivantes sont correctes :

1. 
$$\frac{a \in A \quad A \subseteq B}{a \in B}$$

2. 
$$\frac{a \in A}{a \in A \cup B}$$

3. 
$$\frac{a \in A \cap B}{a \in A}$$



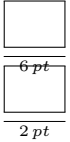
**Q9.** Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles (y compris les règles de la question précédente) pour montrer le théorème  $(X \cap (Y \cup Z)) \subseteq (X \cup (Y \cap Z))$

$$\overline{(X \cap (Y \cup Z)) \subseteq (X \cup (Y \cap Z))}$$



**Q10.** On désigne l'ensemble vide par  $\emptyset$ . Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème  $((X \cap Y) = \emptyset) \implies ((X \subseteq Y) \implies (X = \emptyset))$

$$\overline{((X \cap Y) = \emptyset) \implies ((X \subseteq Y) \implies (X = \emptyset))}$$



### Exercice 3 : Schéma de récurrence associé à un type OCAML

**Q11.** Soit `expr` un type défini par :

```
type expr =
  | I of int
  | Op of expr
  | Plus of expr * expr
```

– Donnez trois éléments différents de type `expr`.

– Complétez le schéma de récurrence associé au type `expr`.

.....  
-----  $\forall i \in \text{expr}, Q(i)$  *rec-expr*



**Q12.** Soit `desc` un type défini par :

```
type desc =
  | P
  | C
  | F of desc
```

– Donnez trois éléments différents de type `desc`.

– Complétez le schéma de récurrence associé au type `desc`.

.....  
-----  $\forall m \in \text{desc}, Q(m)$  *rec-desc*



**Q13.** Donnez le schéma de récurrence associé au type `a3int` défini par :

```
type a3int =
  | AVIDE
  | AB of int * a3int * a3int * a3int
```



21 pt

## Exercice 4 : Preuve par récurrence en déduction naturelle

On considère le type OCAML suivant

```
type zint =  
  | Z  
  | S of zint  
  | P of zint
```

On rappelle le schéma de récurrence associé au type `zint`

$$\frac{Q(Z) \quad \forall i, Q(i) \Rightarrow Q(S(i)) \quad \forall i, Q(i) \Rightarrow Q(P(i))}{\forall i \in \mathbf{zint}, Q(i)} \text{ rec-zint}$$

**Implantation de fonctions définies par des axiomes** On considère la fonction `neg` définie par les axiomes suivants :

$Ax_1 : \text{neg}(Z) = Z$   
 $Ax_2 : \forall i, \text{neg}(S(i)) = P(\text{neg}(i))$   
 $Ax_3 : \forall i, \text{neg}(P(i)) = S(\text{neg}(i))$



2 pt

**Q14.** Écrire en OCAML la fonction `neg` de type `zint`  $\rightarrow$  `zint` qui correspond à ces axiomes.

1  
2  
3  
4  
5

On considère deux fonctions `nbP` et `nbS` qui comptent le nombre de `S`, respectivement le nombre de `P`, dans un élément  $i \in \mathbf{zint}$ . Les fonctions sont définies par les axiomes suivants :

$Ax_4 : \text{nbP}(Z) = 0$   $Ax_7 : \text{nbS}(Z) = 0$   
 $Ax_5 : \forall i, \text{nbP}(S(i)) = \text{nbP}(i)$  *et*  $Ax_8 : \forall i, \text{nbS}(S(i)) = 1 + \text{nbS}(i)$   
 $Ax_6 : \forall i, \text{nbP}(P(i)) = 1 + \text{nbP}(i)$   $Ax_9 : \forall i, \text{nbS}(P(i)) = \text{nbS}(i)$

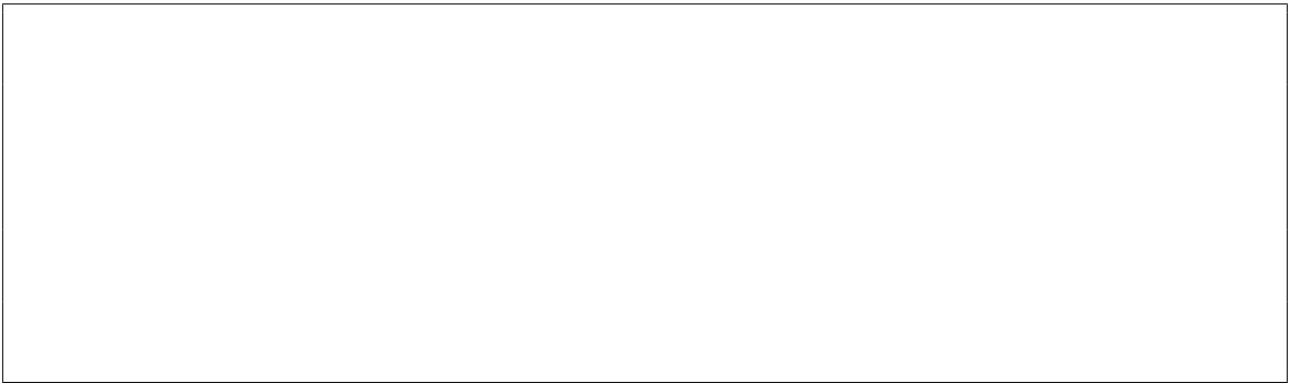


3 pt

**Q15.** Écrire en OCAML les fonctions `nbP` et `nbS` de type `zint`  $\rightarrow$  `nat` qui correspondent à ces axiomes.

1  
2  
3  
4  
5

1  
2  
3  
4  
5



$\square$   

---

*6 pt*

**Q16.** Utilisez les axiomes qui définissent *neg* et le principe de récurrence sur **zint** pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant :

$$Thm_1 : \forall i \in \mathbf{zint}, neg(neg(i)) = i$$





6 pt

**Q17.** Utilisez les axiomes qui définissent  $nbP$  et  $nbS$  et le principe de récurrence sur  $\mathbf{zint}$  pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant :

$$Thm_2 : \forall i \in \mathbf{zint}, nbP(neg(i)) = nbS(i)$$



4 pt

**Q18.** En réutilisant les théorèmes  $Thm_1$  et  $Thm_2$ , démontrez (sans récurrence) le théorème suivant :  $\forall i \in \mathbf{zint}, nbS(neg(i)) = nbP(i)$